Zur punktuellen Erzeugung der Curven vierter Ordnung.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doctorwürde

bei

hochlöblicher philosophischer Facultät zu Marburg

eingereicht

von

Hermann Beyer

aus Zeitz.

Marburg.

1878.

1. Bedeutet u entweder eine ganze rationale Function 4. O. (vierter Ordnung) oder eine eben solche homogene Function von drei homogenen Punktcoordinaten, so ist die durch die Gleichung $u=0$ dargestellte Function eine Curve 4. O.

2. Eine Curve 4. O. ist entweder eine einfache Curve, oder sie besteht aus einer Geraden und einer Curve 3. O., oder aus zwei Geraden und einem Kegelschnitt, oder aus zwei Kegelschnitten, oder aus vier Geraden.

3. Eine Gerade, die nicht einen Theil einer Curve 4. O. bildet, schneidet diese in vier Punkten, davon können zwei zusammenfallen, dann ist die Gerade entweder eine Tangente, oder sie trifft in einem Doppelpunkte. Es können auch drei zusammenfallen, dann ist die Gerade eine Tangente im Doppelpunkte, oder sie ist eine Wendetangente und der Schnittpunkt ein Wendepunkt. Es können auch vier Punkte zusammenfallen, dann ist die Gerade eine Tangente in einem dreifachen Punkte, oder sie ist eine Wendetangente in einem Doppelpunkte. Von den vier Schnittpunkten der Geraden mit der Curve können zwei oder vier imaginär sein.

4. Wenn eine Gerade mit einer Curve 4. O. mehr

als vier Punkte gemein hat, so bildet sie einen Theil der Letzteren.

5. Wenn eine einfache Curve 4. O. mit einer einfachen n. O. zusammengestellt wird, so schneiden beide sich in 4 n Punkten, zwei Curven 4. O. also in 16 Punkten. Vorausgesetzt ist dabei, daß die Gleichung der Curve 4. O. und n. O. keinen gemeinsamen Factor haben. Fallen k dieser Schnittpunkte in einen zusammen, der nicht für eine der Curven ein Doppelpunkt oder ein mehrfacher Punkt ist, so sagt man: die Curven gehen eine kpunktige Berührung ein.

6. Eine einfache Curve 4. O. kann höchstens drei Doppelpunkte oder Rückkehrpunkte haben (Salmon, Higher pl. Curves, pag. 31), oder sie hat höchstens einen dreifachen Punkt. Denn hätte sie zwei solche, so könnte man eine Gerade durch beide legen. Diese würde aber in sechs Punkten schneiden. Besteht sie aus einer Geraden und einer Curve 3. O., so sind entweder drei Doppelpunkte da, oder die Gerade ist eine Wendetangente im Doppelpunkte. Besteht die Curve 4. O. aus zwei Geraden und einem Kegelschnitte, so sind fünf Doppelpunkte da, oder es ist ein dreifacher Punkt da und zwei Doppelpunkte, oder drei Doppelpunkte, oder ein vierfacher Punkt und ein Doppelpunkt.

Besteht die Curve 4. O. aus zwei Kegelschnitten, so sind vier Doppelpunkte vorhanden.

Besteht sie aus vier Geraden, so hat sie sechs Doppelpunkte. Sie hat einen dreifachen, wenn drei Gerade sich in einem Punkte schneiden und dann noch drei Doppelpunkte, oder einen vierfachen Punkt, wenn die Curve aus einem Strahlenbüschel besteht.

7. Hat eine Curve 4. O. einen dreifachen Punkt, so kann sie eine einfache Curve sein. Hat sie einen vierfachen Punkt, so muß sie aus vier in einem Punkte sich schneidender Geraden bestehn. Sonst könnte man eine Gerade hindurchlegen, die in mehr als vier Punkten schnitte.

8. Zur Bestimmung einer Curve 4. O. sind vierzehn Punkte erforderlich und in der Regel auch hinreichend. Sind aber die 14 Punkte so, daß 2 Curven 4. O. hindurchgehn, so lassen sich unendlich viele Curven 4. O. hindurchlegen, die einen Curvenbüschel 4. O. bilden und sich sämmtlich in noch 2 Punkten schneiden.

9. Alle Curven 4. O., die durch 13 Punkte gehn, haben noch 3 Punkte gemein und bilden also einen Curvenbüschel 4. O.

10. 2 Curven 4. O. schneiden sich in 16 Punkten. Liegen davon 4 in einer Geraden, so liegen die andern 12 auf einer Curve 3. O. Denn die Gerade und die Curve 3. O. bilden zusammen eine Curve 4. O. Liegen 8 auf einem Kegelschnitte, so liegen auch die andern 8 auf einem Kegelschnitte, denn die 2 Kegelschnitte zusammen bilden eine Curve 4. O., die die andere in 16 Punkten schneidet.

11. Hat eine Curve 4. O. 4 Asymptoten, so liegen deren Schnittpunkte mit der Curve auf einem Kegelschnitte. Denn die 4 Berührungspunkte liegen auf der unendlich fernen Geraden, die man hier als 2 sich deckende Gerade betrachten kann. Die andern Schnittpunkte liegen also auf einem Kegelschnitte. Aehnlich bei 2 Asymptoten.

12. Liegen von den 16 Punkten viermal je drei

auf einer Geraden, so liegt auf jeder noch ein und nur ein anderer Punkt. Denn die Geraden bilden zusammen wieder eine Curve 4. O. Lägen einmal nur 3 auf einer Geraden, so müßten einmal auf einer 5 Punkte liegen. Aber eine Gerade schneidet eine Curve 4. O. nur in 4 Punkten.

13. Die Sätze § 11 und § 12 geben eine Erweiterung des Pascal'schen Theorems. Denn nimmt man 8 Punkte auf einem Kegelschnitte an und verbindet sie beliebig durch 8 Gerade, z. B.:

12	23
34	45
56	67
78	81

so bilden diese Geraden 2 Curven 4. O., die sich in 16 Punkten schneiden. Von diesen liegen 8 auf einem Kegelschnitte, also liegen die übrigen 8 wieder auf einem Kegelschnitte.

14. Wenn von 14 Punkten einer Curve 4. O. 4 auf einer Geraden, die übrigen zehn also auf einer Curve 3. O. liegen, oder wenn 2 Kegelschnitte durch die 14 Punkte gelegt werden können, so gehen unendlich viele Curven 4. O. durch die 14 Punkte, die sämmtlich noch 2 Punkte gemein haben. Denn dann gehen 2 Curven 4. O. durch die 14 Punkte.

15. Liegen von 14 Punkten in der Ebene 4 auf einer Geraden, die übrigen 10 aber nicht auf einer Curve 3. O., so läßt sich durch die 14 Punkte nur 1 Curve 4. O. hindurchlegen, denn es lassen sich nicht 2 hindurchlegen.

Liegen die 14 Punkte so, daß auch nicht 2 Kegel-

schnitte hindurchgelegt werden können, so ist auch nur 1 Curve 4. O. durch sie zu legen möglich aus demselben Grunde.

16. Zieht man aus den Schnittpunkten a, a′, a″, a‴ einer Geraden mit einer Curve 4. O. Sekanten: a b c d, a′ b′ c′ d′, a″ b″ c″ d″, a‴ b‴ c‴ d‴, so liegen die 12 andern Schnittpunkte derselben mit der Curve auf einer Curve 3. O., denn die 4 Sekanten bilden eine Curve 4. O., die die Curve 4. O. in 16 Punkten schneidet. Liegen aber davon 4 in einer Geraden (a a′ a″ a‴), so liegen die andern 12 auf einer Curve 3. O.

17. Schneidet man eine Curve 4. O. durch einen Kegelschnitt, so trifft dieser in 8 Punkten. Legt man durch diese 2 beliebige Kegelschnitte so, daß jeder davon 4 Punkte enthält, so schneidet jeder dieser beiden Kegelschnitte die Curve 4. O. in weiteren 4 Punkten. Diese letzten 8 Punkte liegen wieder auf einem Kegelschnitte. Denn die 16 Punkte gehören einer Curve 4. O. an, davon liegen je 8 auf einem Kegelschnitte, (welche zuletzt durchgelegt waren). Diese beiden Kegelschnitte bilden wieder eine Curve 4. O. Von den 16 Schnittpunkten der ersten Curve 4. O. mit der zweiten 4. O., die aus 2 Kegelschnitten besteht, liegen aber 8 auf dem ersten Kegelschnitte, mithin liegen auch die andern 8 auf einem Kegelschnitte. Wenn die zuletzt hindurchgelegten Kegelschnitte in Gerade übergehn, so findet dasselbe statt.

Auch dieser Satz erweitert das Theorem von Pascal.

18. Gehn die Sekanten des § 16 in Tangenten über, so folgt: Zieht man aus 4 in gerader Linie liegenden Punkten einer Curve 4. O. je eine Tangente an die Curve, so wird diese in den Berührungspunkten

von einer Curve 3. O. berührt, die noch durch die 4 andern Schnittpunkte geht.

19. Hat man 4 Tangenten an eine Curve 4. O. so gezogen, daß die Berührungspunkte in einer Geraden liegen, so liegen die andern 8 Durchschnitte auf einem Kegelschnitt. Denn 2 Gerade sind zusammengefallen und bilden mit noch einem Kegelschnitt zusammen eine Curve 4. O.

20. Umgekehrt folgt: Liegen 12 Punkte einer Curve 4. O. so auf einer Curve 3. O., daß je 3 außerdem auf einer Geraden liegen, so liegen auch die 4 Punkte, in denen die 4 Geraden die Curve 4. O. weiter schneiden, in einer Geraden.

Ferner: Liegen 8 Punkte einer Curve 4. O. so auf einem Kegelschnitte, daß 4 Verbindungslinien dieser Punkte die Curve tangieren, so liegen diese Berührungspunkte auf einer Geraden.

21. Kann man von 4 in einer Geraden liegenden Punkten einer Curve 4. O. Tangenten so legen, daß sie nur noch in 1 Punkte treffen, so liegen diese Treffpunkte auch in einer Geraden. Das folgt aus der Umkehrung des Satzes. Lägen 4 Berührungspunkte in einer Geraden, so lägen die andern 8 Schnittpunkte der 4 berührenden Geraden mit der Curve 4. O. auf einem Kegelschnitte. Rücken nun 4 dieser Punkte ebenfalls in die Berührungspunkte hinein, so degeneriert der Kegelschnitt in 2 Gerade, weil die 4 Punkte in eine Gerade fallen.

22. Schneidet man eine Curve 4. O. durch 2 Gerade, die in

$$a,\ a',\ a'',\ a''',\quad b\ b'\ b''\ b'''$$

treffen, und zieht man

$$ab,\ a'b',\ a''b'',\ a'''b''',$$

so liegen die 8 andern Schnittpunkte dieser 4 Geraden mit der Curve 4. O. auf einem Kegelschnitte. Denn die 2 Geraden und der Kegelschnitt bilden eine Curve 4. O., die 4 Verbindungslinien auch, und diese schneiden sich in 16 Punkten. Weiter gehört hierher § 13.

23. Zieht man in 4 auf einer Geraden liegenden Punkten einer Curve 4. O. Tangenten an die Curve, so entstehn weitere 8 Schnittpunkte, die auf einem Kegelschnitte liegen § 19. Dieser heißt: Begleitender Kegelschnitt.

Zieht man die Tangenten so, daß sie nicht in ihren Ausgangspunkten berühren, so findet § 18 statt.

24. Sind a a′ a″ a‴ Schnittpunkte einer Geraden mit einer Curve 4. O., und zieht man von einem Punkte d der Letzteren Gerade nach diesen 4 Punkten, so werden noch 8 Punkte

bc, b′c′, b″c″, b‴c‴

ausgeschnitten. Durch diese 8 Punkte und d läßt sich eine Curve 3. O. legen, und diese geht in d mit der Curve 4. O. eine 4punktige Berührung ein.

Kann man in 4 auf einer Geraden liegenden Punkten einer Curve 4. O. Tangenten an die Curve ziehen, welche sich auf einem Curvenpunkte d schneiden, so geht der durch die 4 andern Schnittpunkte und d bestimmte Kegelschnitt eine 4punktige Berührung mit der Curve 4. O. ein. Denn in d fallen 4 Punkte der Curve und 4 des Kegelschnitts zusammen.

25. Schneidet man eine Curve 4. O. durch einen Kegelschnitt, so trifft dieser in 8 Punkten. Legt man nun durch je 4 und einen beliebigen Punkt m der Curve 4. O. Kegelschnitte, so daß durch m also 2 Kegelschnitte gehn, so werden zwei Mal 3 Punkte ausgeschnitten, und

durch diese und m geht ein Kegelschnitt, der die Curve 4. O. in m berührt. Ist m ein Doppelpunkt, so hat die Curve 2. O. mit der Curve 4. O. 3 Punkte gemein.

26. Geht eine Curve 4. O. durch die Ecken eines Achtecks, dessen Seiten

1 2 3 4 5 6 7 8 genannt werden,

und außerdem durch 5 von den 8 Schnittpunkten, in denen die Seiten des Achtecks sich schneiden

(25, 27, 47, 41, 61, 63, 83, 85),

so geht sie auch durch die 3 andern Schnittpunkte der Achtecksseiten. Denn die Seiten des Achtecks bilden 2 Curven 4. O.: 1357 und 2468, die sich in 16 Punkten schneiden. Davon liegen 13 auf einer andern Curve 4. O., und alle Curven 4. O., die durch 13 Punkte gehn, haben noch 3 Punkte gemeinsam.

Besteht die Curve 4. O. aus 2 Kegelschnitten, so folgt die Erweiterung des Pascal'schen Theorems § 17, denn dann müssen sämmtliche 8 Punkte auf dem Kegelschnitte liegen, der durch die 5 geht.

Besteht die Curve 4. O. aus einer Geraden und einer Curve 3. O., so haben wir Aehnliches. Läßt sich durch die Ecken eines Achtecks und durch 4 Schnittpunkte der Seiten desselben eine Curve 4. O. legen, die aus einer Curve 3. O. besteht, so liegen die 4 andern Durchschnitte der Seiten in einer Geraden. Denn die Achtecksseiten bilden 2 Curven 4. O., die sich in 16 Punkten schneiden. 12 davon liegen in einer Curve 3. O., also liegen die übrigen 4 in einer Geraden.

27. Wenn ein Strahlbüschel und ein Büschel von Curven 3. O., oder wenn 2 Kegelschnittbüschel zu ein-

ander projectivisch sind, so ist der geometrische Ort der Durchschnitte sich entsprechender Elemente eine Curve 4. O., die durch sämmtliche Basispunkte hindurchgeht.

$$A + \lambda A' = 0$$

stellt ein Strahlbüschel dar, wenn A und A' lineare Ausdrücke der Coordinaten sind,

$$K + \lambda K' = 0$$

ein Curvenbüschel 3. O., wenn K und K' die Coordinaten in der dritten Potenz enthalten. Elemente, die gleichen Werthen von λ zugehören, heißen sich projectivisch entsprechend. Man erhält daher den geometrischen Ort der Durchschnitte sich entsprechender Elemente, wenn man λ eliminiert.

$$A K' - A' K = 0$$

stellt dann eine Curve 4. O. dar. Sie geht durch den Schnittpunkt von

$$A = 0 \qquad \text{und} \qquad A' = 0$$

d. h. durch den Mittelpunkt des Strahlenbüschels, ferner auch durch die Schnittpunkte von

$$K = 0 \qquad \text{und} \qquad K' = 0$$

also durch die Basispunkte des Büschels 3. O.

Stellen

$$K + \lambda K' = 0$$
$$L + \lambda L' = 0$$

2 Kegelschnittbüschel dar, so repräsentiert wieder

$$K L - L K' = 0$$

den geometrischen Ort der Schnittpunkte sich entsprechender Kegelschnitte, eine Curve 4. O., die wieder durch die Basispunkte hindurchgeht.

28.a. Wenn eine Curve 4. O. durch einen Strahlbüschel mit dem Mittelpunkte m und einen Curvenbüschel

3. O. erzeugt ist, so entspricht die Curve 3. O., die durch m geht, dem Strahle, der die Curve 4. O. in m berührt. Denn jeder Strahl schneidet von der ihm entsprechenden Curve 3. O. 3 Punkte aus. Die Curve 3. O., die durch m geht, wird nur noch in 2 Punkten geschnitten. Ein Schnittpunkt entsprechender Elemente fällt mit dem Strahlenmittelpunkte, durch den die Curve 4. O. gehen mußte, zusammen, in m hat also die erzeugte Curve 2 Punkte mit dem ihr entsprechenden Strahle gemein.

28.b. Ist eine Curve 4. O. durch 2 Kegelschnittbüschel erzeugt, so entspricht der Kegelschnitt, der durch einen Basispunkt des andern Büschels geht, dem Kegelschnitte, der die erzeugte Curve in diesem Basispunkte berührt.

Denn die erzeugte Curve geht durch die 8 Basispunkte und die 4 Schnittpunkte zweier sich entsprechender Kegelschnitte. Geht einmal ein Kegelschnitt durch einen Basispunkt, so fällt ein Schnittpunkt mit dem ihm entsprechenden Kegelschnitte in einen Basispunkt hinein, durch den die Curve 4. O. gehen mußte. Der ihm entsprechende Kegelschnitt hat also hier 2 Punkte mit der Curve 4. O. gemein. Liegen die Basispunkte des Büschels so, daß einmal ein Kegelschnitt des andern Büschels durch 2 hindurchgeht, so geht der ihm entsprechende Kegelschnitt zwei Mal eine zweipunktige Berührung mit der Curve 4. O. ein.

29.a. Der Strahl, der durch einen Basispunkt a des Büschels 3. O. geht, entspricht der Curve 3. O., die in a die erzeugte Curve berührt. Denn jeder Strahl schneidet die zugehörige Curve 3. O. in 3 Punkten. Geht

er aber durch einen Basispunkt, so fällt ein Schnittpunkt in diesen hinein. Die Curve 3. O. hat also hier 2 Punkte mit der erzeugten Curve gemein.

29. b. § 28.

30. a. Sind auf einer Curve 4. O. beliebig viele feste Punkte gegeben, so kann man stets 6, aber nur 6 davon zu Basispunkten eines Büschels 3. O. machen, der mit einem Strahlbüschel, dessen Mittelpunkt ein 7ter der gegebenen Punkte ist, die vorgelegte Curve 4. O. erzeugt.

Man ziehe durch einen (m) der gegebenen Punkte eine Gerade, so werden von dieser 3 Punkte ausgeschnitten. Durch die 6 gegebenen Punkte und die 3 letzten läßt sich immer eine Curve 3. O. legen. Legt man eine zweite Gerade durch m, so wird dadurch eine zweite Curve 3. O. bedingt, die wieder durch dic 6 gegebenen Punkte geht. Durch eine dritte Gerade von m aus wird weiter eine Curve 3. O. festgelegt. Somit sind 16 Punkte der Curve 4. O. bestimmt, also ist sie dadurch eindeutig definiert. Es ist aber auch eine Projectivität der Elemente bestimmt, durch welche die Curve erzeugt werden muß, die gerade vorgelegt ist. Es bilden also die Curven 3. O. ein Büschel, durch dessen 9 Basispunkte die Curve 4. O. hindurchgeht. Also liegen auch die 3 andern Basispunkte des Büschels auf der Curve 4. O.

30. b. Die Gleichung jeder Curve 4. O. läßt sich in die Form setzen

$$AB - \varkappa A' B' = 0,$$

wo A und A′ lineare Ausdrücke der Coordinaten sind, die B aber dieselben in der dritten Potenz enthalten. Nennt man den Schnitt von $A = 0$ und $A' = 0$ „m“,

so geht die Curve 4. O. durch diesen Punkt. Der durch m gehende Strahlbüschel wird dargestellt durch:

$$A - \lambda A' = 0$$

Demnach müssen die Punkte der Curve 4. O., die auf irgend einem dieser Strahlen liegen, der Gleichung genügen:

$$B - \frac{\varkappa}{\lambda} B' = 0$$

Diese aber stellt einen Curvenbüschel 3. O. dar. In der Gleichung der Curve 4. O. hat man 14 willkührliche Constanten. Setzt man (A A′) = m, so sind nur noch 12 willkührlich. Man kann daher noch 6 Punkte willkührlich annehmen, durch die das Büschel 3. O. gehen soll.

31.a. Sind auf einer Curve 4. O. mehrere Punkte beliebig gegeben, so kann man stets 5, aber nur 5, zu Basispunkten zweier Kegelschnittbüschel wählen, die die vorgelegte Curve 4. O. erzeugen.

Man lege durch 4 der gegebenen 5 Punkte einen Kegelschnitt, so schneidet dieser die Curve 4. O. noch in 4 Punkten. Durch diese und den letzten gegebenen Punkt ist wiederum ein Kegelschnitt bestimmt. Läßt man den ersten Kegelschnitt variieren, so geht der andere immer durch den letzten gegebenen Punkt und 3 feste andere. Denn betrachtet man die beiden Kegelschnitte zuerst als fest, so hat man 8 Punkte einer Curve 4. O., die auf einem Kegelschnitte liegen. Zieht man aber nach § 17 durch je 4 dieser Punkte Kegelschnitte, so liegen die weiteren 8 Schnittpunkte dieser beiden mit der Curve 4. O. wieder auf einem Kegelschnitte. Läßt man jetzt den einen Kegelschnitt variieren, so wird die

Curve 4. O. jedesmal in 4 andern Punkten geschnitten, die aber mit den 4 durch den zweiten Kegelschnitt bedingten Punkten immer auf einem Kegelschnitte liegen. Variiert also der eine Kegelschnitt, so variiert auch der andere, geht aber immer durch 4 feste Punkte, von denen der eine gegeben ist.

Durch die ersten beiden Kegelschnitte sind 12 Punkte bestimmt. Wählt man noch 2 auf der Curve 4. O., so sind die beiden andern Paare sich entsprechender Kegelschnitte fest bestimmt, und so ist die Projectivität festgesetzt. Zugleich aber ist durch die 14 Punkte die Curve 4. O. eindeutig bestimmt, wenn die beiden zuletzt angenommenen Punkte nach § 15 nicht so liegen, daß durch sie und die 4 Basispunkte des zweiten Büschels ein Kegelschnitt möglich ist. So sind also die 5 Punkte zu Basispunkten zweier Kegelschnittbüschel gemacht, die die vorgelegte Curve 4. O. erzeugen.

31.b. Die Gleichung jeder Curve 4. O. läßt sich auf die Form bringen:

$$AB - \varkappa A'B' = 0$$

wo die A und B quadratische Ausdrücke der Coordinaten sind, $\varkappa$ eine Constante. Darin sind 10 Constanten willkührlich, weil jede allgemeine quadratische Function 5 willkührliche Constanten hat. Bestimmt man daher:

$$A - \lambda A' = 0,$$

also 4 Punkte und damit 8 Constanten, so erhält man:

$$B - \frac{\varkappa}{\lambda} B' = 0,$$

also einen Kegelschnittbüschel. Der ist aber unbestimmt, so lange wir nicht noch über die 2 verfügbaren Con-

stanten bestimmen. Legen wir einen Punkt fest, so ist der Büschel bestimmt und geht durch diesen Punkt.

32. Fallen von den in § 30 gegebenen Punkten 2 in 1 zusammen, so kann man die Curve 4. O. als Erzeugniß eines Strahlbüschels betrachten, dessen Mittelpunkt einer der gegebenen ist, mit einem Büschel 3. O., dessen Elemente in dem 2fachen Punkte die erzeugte Curve 4. O. sämmtlich berühren.

Fallen 3 zusammen, so gehn hier die Elemente des Büschels 3. O. mit der Curve eine 3punktige Berührung ein u. s. f.

33. Fallen von den in § 31 gegebenen 5 Punkten 2 in 1 zusammen, so kann man ein Kegelschnittbüschel finden, von dem in diesem Punkte jedes Element die Curve 4. O. berührt und mit einem andern Büschel, das durch den 5ten Punkt bestimmt ist, die Curve 4. O. erzeugt u. s. f.

34. Mehrere Curven 4. O. zu construiren, die durch 12 gegebene Punkte hindurchgehn und durch einen Büschel von Curven 3. O. und einen Strahlbüschel erzeugt werden. Man nehme 8 Punkte an als Basispunkte eines Büschels 3. O. Durch diese und 9 lege man eine Curve 3. O. Dieser soll dann der Strahl 9 10 entsprechen. Man lege eine zweite Curve 3. O. durch die 8 Basispunkte und 11. Dieser Curve soll der Strahl 10 11 entsprechen, und zuletzt lege man durch die 9 Schnittpunkte der beiden bereits construirten Curven 3. O. und 12 eine Curve 3. O. und bestimme, daß dieser der Strahl 10 12 entsprechen soll. Die letzte Curve 3. O. ist möglich, sie kann durch die 10 Punkte hindurchgehn nach § 8. Im Uebrigen ist nun die Curve

4. O., die so erzeugt wird, vollständig bestimmt. Denn da 3 Paare von Elementen der Projectivität festgesetzt sind, so sind die sich entsprechenden Elemente sämmtlich bestimmt, also wird eine ganz bestimmte Curve 4. O. erzeugt.

Diese ist jedoch nicht die einzige, die möglich ist. Wenn man beliebigen 8 Punkten der gegebenen 12 die Rolle der früheren 8 Punkte als Basispunkte eines Büschels 3. O. ertheilt und außerdem irgend einem der vier übrigen die des Mittelpunkts des Strahlbüschels, so gehn immer andere Curven 4. O. hervor, die aber sämmtlich die 12 vorgelegten Punkte enthalten.

35. Auch auf andere Art läßt sich die Construction ermöglichen.

Man wähle 7 Punkte von den gegebenen 12 als Basispunkte eines Büschels von Curven 3. O. aus. Durch diese und 8 und 9 lege man eine Curve 3. O. und lasse ihr den Strahl 8 9 entsprechen. Dann lege man durch die 7 und 10 und 11 wieder eine Curve 3. O., der man den Strahl 10 11 entsprechen läßt. Ferner lege man durch die 9 Schnittpunkte der beiden Curven 3. O. und durch 12, was wiederum aus dem vorhin angegebenen Grunde nach § 8 möglich ist, eine Curve 3. O. und lasse ihr den Strahl entsprechen, der durch 12 und den Schnittpunkt der beiden vorigen Strahlen hindurchgeht. Alsdann ist wiederum die Projectivität zwischen Strahl- und Curvenbüschel eindeutig festgesetzt und es entsteht eine ganz bestimmte Curve 4. O.

Auch hier ist die Construction mehrerer Curven 4. O. möglich, indem man die Rolle der zuerstgewählten 7 Punkte 7 anderen überläßt.

Sind 13 Punkte vorgelegt, so ist es auf diese Weise (§ 34 und § 35) nicht möglich, eine der durch sie gehenden Curven 4. O. zu construieren, wenn nicht einer der Punkte eine solche specielle Lage einnimmt, daß sich 2 einander entsprechende Elemente in ihm schneiden. Will man die Curve 4. O. erzeugt sein lassen durch 2 Kegelschnittbüschel, alsdann läßt sich unmittelbar nur eine Curve 4. O. finden, die durch 11 gegebene Punkte hindurchgeht.

36. Mehrere Curven 4. O. zu construieren, die durch 11 gegebene Punkte gehn und durch Kegelschnittbüschel erzeugt werden.

Man bestimme 8 Punkte zu Basispunkten zweier Kegelschnittbüschel und lege durch vier dieser und 9 einen Kegelschnitt. Diesem soll der Kegelschnitt zugehören, der durch die 4 andern der 8 Punkte und ebenfalls durch 9 geht. Ebenso construiere man 2 Kegelschnitte, die noch durch 10 als fünften Punkt und noch 2, die durch 11 als fünften Punkt hindurchgehn und bestimme, daß diese beiden Paare einander zugeordnet sein sollen. Alsdann ist die Projectivität festgesetzt, und es wird eine Curve 4. O. erzeugt, die durch die 11 gegebenen Punkte geht.

Man kann hier abermals statt der zuerstgewählten 8 Basispunkte 8 andere wählen und diese 8 beliebig zu je 4 gruppieren, so entstehen immer andere Curven 4. O.

Specielle Fälle.

37. Eine der Curven 4. O. zu construieren, die durch 13 Punkte gehn, wenn sich durch einen der gegebenen Punkte zwei Gerade ziehn lassen, die noch je 2 der gegebenen Punkte enthalten.

Seien das die Geraden 1, 9, 10, und 1, 11, 12, so ordne man dem

Strahle 1, 9, 10 die Curve 3. O. 2—8, 9, 10 zu,
„ 1, 11, 12 „ „ 2—8, 11, 12,
„ 1, 13, „ „ 2—8, a, b, 13,

wo a b die 2 neuen Schnittpunkte sind, in denen sich die beiden Curven 3. O. schneiden. Die Punkte 2—8, a, b sind dann die Basispunkte des erzeugenden Büschels von Curven 3. O., deshalb ist auch nach § 8 die Curve 3. O. 2—8, a, b, 13 möglich.

38. Eine der Curven 4. O. zu construieren, die durch 13 Punkte gehn, wenn auf zwei Verbindungslinien der gegebenen Punkte noch ein dritter liegt.

Seien das die Geraden 1, 2, 3 und 4, 5, 6, so mache man ihren Schnittpunkt zum Mittelpunkt eines Strahlbüschels und wähle die 6 Punkte 8—13 zu Basispunkten eines Büschels 3. O. Dann ordne man dem

Strahle 1 2 3 die Curve 3. O. 1, 2, 3, 8—13,
„ 4 5 6 „ „ 4, 5, 6, 8—13,
„ 7a „ „ 7, b, c, d, 8—13 zu,

wo a der Schnittpunkt der Geraden 1 2 3 und 4 5 6 ist, b, c, d aber die 3 neuen Schnittpunkte der Curven 3. O. bedeuten. Somit ist wieder eine Projectivität festgesetzt, wodurch die Curve 4. O. erzeugt wird.

39. Eine Curve 4. O. zu construieren, wenn 14 Punkte so gegeben sind, daß von einem der gegebenen Punkte 2 Strahlen ausgehen, von denen jeder noch 3 der andern enthält.

Seien das die Geraden 1 2 3 4 und 1 5 6 7, so wähle man 1 zum Strahlenmittelpunkt, 8—13 zu Basispunkten eines Büschels 3. O. Man ordne nun wiederum die Elemente einander so zu, daß dem

Strahle	1 2 3 4	die Curve 3. O.	2, 3, 4,	8—13
	1 5 6 7	„ „	5, 6, 7,	8—13
	1 14	„ „	14, a, b, c,	8—13

entspricht. a b c bedeuten hier wieder die Schnittpunkte der beiden zuerst gezogenen Curven 3. O. und bilden mit 8—13 zusammen die Basispunkte des Büschels von Curven 3. O. Eine weitere Construction sich entsprechender Elemente liefert neue Punkte der Curve 4. O.

40. Sind 14 Punkte so gegeben, daß 4 davon die Durchschnitte zweier Kegelschnitte sind, von denen jeder noch 4 andere der gegebenen Punkte enthält, so soll die Curve 4. O. zu construiert werden, die durch diese 14 Punkte geht.

Man betrachte die 4 Schnittpunkte als Basispunkte eines Kegelschnittbüschels, ordne die beiden Kegelschnitte hierin einander projectivisch zu und außerdem noch die Kegelschnitte des Büschels, die durch Punkt 13 und die durch Punkt 14 gehn. Durch diese 3 Paare ist die Projectivität festgesetzt, durch welche die geforderte Curve 4. O. erzeugt wird.

41. Sind 14 Punkte so gegeben, daß auf jedem Kegelschnitt, der durch 1 2 3 4 und einen der Punkte 9—14

geht, noch ein zweiter dieser Punkte liegt, und daß die Punkte 5 6 7 8 dieselbe Eigenschaft haben, wie die Punkte 1—4, so kann man die Curve 4. O. leicht construieren.

Man construiere die Kegelschnitte:

$$\left.\begin{matrix} 1\ 2\ 3\ 4 & 9\ (12) \\ 5\ 6\ 7\ 8 & 12\ (\ 9) \end{matrix}\right\}$$

$$\left.\begin{matrix} 1\ 2\ 3\ 4 & 10\ (13) \\ 5\ 6\ 7\ 8 & 13\ (10) \end{matrix}\right\}$$

$$\left.\begin{matrix} 1\ 2\ 3\ 4 & 11\ (14) \\ 5\ 6\ 7\ 8 & 14\ (11) \end{matrix}\right\}$$

so bestimmen diese 3 Paare wieder eine Projectivität, die die Curve 4. O. erzeugt.

---

42. Zieht man in einem Basispunkte eines Büschels 3. O. an jede Curve die Tangente, so entsteht ein Tangentenbüschel, das mit dem Curvenbüschel projectivisch ist, wenn man jeder Curve ihre Tangente zuordnet.

Die Tangente in einem Curvenpunkte x der Curve $u = 0$ hat die Gleichung:

$$\Delta_x \left(u_y\right) = 0,$$

das Tangentenbüschel also im Basispunkte des Büschels 3. O.

$u + \lambda\ v = 0$ die Gleichung:

$$\Delta_x \left(u_y\right) + \lambda\ \Delta_x \left(u_y\right) = 0.$$

Demnach ist jedes Tangentenbüschel in einem Basispunkte sowohl dem Curvenbüschel als auch den übrigen Tangentenbüscheln in den Basispunkten projectivisch zugeordnet.

43. Sind also 3 Strahlen und 3 Curven 3. O. gegeben, wie in den vorhergehenden Aufgaben § 34, 35, 37, 38, 39, die einander projectivisch entsprechen, so findet man andere Curvenpunkte der dadurch definierten Curve 4. O. in folgender Weise:

Man construiert sich ein Tangentenbüschel in einem Basispunkte und bestimmt im Strahl- und Tangentenbüschel 2 sich projectivisch entsprechende Strahlen. Dann construiert man eine Curve 3. O., die durch die 9 Basispunkte geht und den eben gefundenen Strahl des Tangentenbüschels im Basispunkte berührt. Die Schnittpunkte dieser Curve 3. O. mit dem Strahle des Strahlbüschels sind weitere Punkte der Curve 4. O.

44. Bedeutet x den Abstand eines veränderlichen Punktes einer Geraden von einem beliebigen festen Punkte derselben, und besteht die Gleichung:

$$\begin{aligned} & a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n \\ & + \lambda \cdot \left(b_0 x^n + b_1 x^{n-1} \cdots + b_n \right) = 0, \end{aligned}$$

worin die a und b gegebene, λ aber einen veränderlichen Zahlencoefficienten bedeutet, so entsprechen jedem Punkte x (n—1) andere Punkte der Geraden. Denn setzt man den einem angenommenen Punkte zugehörigen Werth von x in die Gleichung, so liefert diese zunächst den zugehörigen Werth von λ und besitzt dann n Wurzeln, von denen eine die angenommene x ist. Man kann

auch sagen, daß jedem Werthe von λ vermöge der Gleichung eine Gruppe von n Punkten zugehört, entsprechend den n Wurzeln der Gleichung. Das System solcher Punktgruppen, welches entsteht, wenn man λ andere und andere Werthe zuertheilt, heißt eine Involution n^{ten} Grades. (Durège.)

45. Schneidet man ein Büschel 4. O. durch eine beliebige Transversale, so bilden die Punktegruppen, die von den Curven 4. O. ausgeschnitten werden und von denen jede aus 4 Punkten der nemlichen Curve besteht, eine biquadratische Involution.

Denn das Curvenbüschel 4. O. in Bezug auf ein System von Parallelcoordinaten x und y läßt sich darstellen in der Form:

$$u + \lambda\, v = 0.$$

Läßt man die Transversale x = Axe sein und setzt y = 0, so erhält man die Schnittpunkte in der x = Axe, also hier eine Gleichung von der Form:

$$a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$
$$+ \lambda \cdot \left\{ b_4 x^4 + b_3 x^3 + b_2 x^2 + b_1 x^1 + b_0 \right\} = 0.$$

Das ist aber eine Gleichung, wie die in § 44, und zeigt an, daß diese Punktegruppen eine biquadratische Involution bilden.

46. Durch 2 conjugierte Punktegruppen 1 2 3 4 und 1′ 2′ 3′ 4′. die man auf einer Geraden willkührlich annimmt, ist eine biquadratische Involution vollständig bestimmt.

Ein Büschel von Curven 4. O. ist vollständig bestimmt durch seine 16 Basispunkte. Zwei Curven 4. O.

schneiden sich in 16 Punkten, welche man immer als Basispunkte eines Büschels von Curven 4. O. betrachten kann, denn da 2 Curven 4. O. durch diese Punkte hindurchgehn, so gehen auch unendlich viele hindurch § 8. Durch jeden andern Punkt der Ebene m geht nur 1 Curve des Büschels 4. O., und diese schneidet einen beliebigen Strahl, der durch m geht, in ferneren 3 Punkten. Diese bilden mit m eine Punktegruppe der biquadratischen Involution. Da die ganze Curve 4. O. eindeutig bestimmt ist, so ist auch die Punktegruppe eindeutig bestimmt. Durch 2 Punktegruppen ist die Involution demnach vollständig bestimmt.

47. Ist eine Involution 4ten Grades auf einer Geraden bestimmt durch 2 Punttegruppen, so wird verlangt, zu irgend einem gegebenen andern Puntte der Geraden die 3 übrigen Puntte der Gruppe zu construieren.

Man nenne die Punkte der Gruppe I. 1 2 3 4 und die der Gruppe II. 5 6 7 8, der letzte gegebene Punkt sei 9, man lege durch 1 2 3 4 vier Gerade, (die auch parallel sein können), schneide diese mit einem Strahle, der durch 9 geht, und nenne die Schnittpunkte 10 11 12 13. Sodann ziehe man die Geraden:

$$\underset{\smile}{5\;10} \qquad \underset{\smile}{6\;11} \qquad \underset{\smile}{7\;12} \qquad \underset{\smile}{8\;13},$$

so sind 2 Curven 4. O. entstanden, von denen jede aus 4 Geraden besteht:

$$\underset{\smile}{1\;10} \qquad \underset{\smile}{2\;11} \qquad \underset{\smile}{3\;12} \qquad \underset{\smile}{4\;13} \text{ und}$$

$$\underset{\smile}{5\;10} \qquad \underset{\smile}{6\;11} \qquad \underset{\smile}{7\;12} \qquad \underset{\smile}{8\;13}.$$

Diese schneiden sich in 16 Punkten, durch welche unendlich viele Curven 4. O. möglich sind, unter andern auch eine, die aus einer Geraden und einer Curve 3. O. besteht. Denn von den 16 Schnittpunkten liegen vier, nemlich 10, 11, 12, 13 in einer Geraden, also liegen nach § 10 die andern 12 auf einer Curve 3. O. Construiert man also diese Curve 3. O., deren Möglichkeit eben gezeigt ist, nach den Regeln, die über die Curven 3. O. gelten, so bildet diese mit dem Strahle 10, 11, 12, 13 eine neue Curve 4. O., die durch die 16 Basispunkte hindurchgeht. Diese letzte Curve 4. O. schneidet die Gerade, die der Träger der Involutionsgruppen 1 2 3 4 und 5 6 7 8 war, in 4 Punkten, die wieder zusammen eine Involutionsgruppe bilden. Der Punkt 9 ist einer davon, die drei andern werden also von der Curve 3. O. ausgeschnitten, die vorhin construiert wurde.

48. Sind 2 Curven eines Curvenbüschels 4. O. gegeben, so kann verlangt werden, die Curve des Büschels zu construieren, die durch irgend einen gegebenen 17ten Punkt der Ebene hindurchgeht.

Man lege durch Punkt 17 einen beliebigen Strahl, so schneidet dieser jede der gegebenen 2 Curven 4. O. in 4 Punkten, die eine Gruppe der Involution vierten Grades bilden. Man suche dann, wie im vorigen § vorgeschrieben ist, die drei andern Punkte auf, die zu derselben Gruppe wie Punkt 17 gehören, so sind dieses Punkte der gesuchten Curve 4. O. Variiert man den Strahl, der durch 17 geht, so werden immer neue Punkte von den beiden Leitcurven 4. O. ausgeschnitten, und es bilden mit 17 immer andere 3 Punkte eine Gruppe der

Involution. So kann man sich so viele Punkte der gesuchten Curve 4. O. verschaffen, als man nur will.

49. Alle Curven 4. O., die durch 12 gegebene Punkte hindurchgehn, bilden ein Curvennetz 4. O.

Denn nennt man

$$u = 0 \qquad v = 0 \qquad w = 0$$

die Leitcurven des Netzes, die nur 12 Punkte gemeinsam haben, so stellt die Gleichung:

$$u + \lambda\, v + \mu\, w = 0$$

alle Curven des Netzes dar, die durch die 12 Punkte der Leitcurven gehen, so lange λ und μ beliebig sind. Greift man aber 2 Punkte der Ebene beliebig heraus, durch welche eine Curve des Netzes gehen soll, so ist die Curve vollständig bestimmt. Substituiert man andrerseits die Werthe, die u v w in diesen beiden Punkten annehmen, in die obige Gleichung, so erhält man 2 lineare Bedingungsgleichungen für λ und μ, wodurch λ und μ eindeutig bestimmt sind. Diese Werthe für λ und μ dann in die obige Gleichung eingesetzt, ergeben eine Curve des Netzes, die durch die beiden betrachteten Punkte geht. Da also jede durch 12 Punkte gehende Curve 4. O. durch obige Gleichung dargestellt wird, so ist klar, daß alle diese Curven ein Curvennetz 4. O. bilden.

50. Bei einem Netz von Curven 4. O., die 12 Punkte gemeinsam haben, liegen die auf ihnen vorkommenden Doppelpunkte auf einer Curve 9. O., und jeder Punkt dieser Curve ist ein Doppelpunkt für irgend eine Curve des Netzes.

Ein Doppelpunkt einer Curve $u = 0$ muß bekanntlich den Bedingungen genügen:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0 \qquad \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0 \qquad \frac{\partial u}{\partial x_3} = 0.$$

Für die Doppelpunkte einer Curve des Netzes, dessen Gleichung ist:

$$u + \lambda\, v + \mu\, w = 0$$

gelten demnach die Bedingungsgleichungen:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial v}{\partial x_1} + \mu \frac{\partial w}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} + \lambda \frac{\partial v}{\partial x_2} + \mu \frac{\partial w}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_3} + \lambda \frac{\partial v}{\partial x_3} + \mu \frac{\partial w}{\partial x_3} = 0$$

Durch Elimination von λ und μ erhält man als geometrischen Ort für alle Doppelpunkte der Curven des Netzes folgende Gleichung:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1}, & \frac{\partial v}{\partial x_1}, & \frac{\partial w}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u}{\partial x_2}, & \frac{\partial v}{\partial x_2}, & \frac{\partial w}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u}{\partial x_3}, & \frac{\partial v}{\partial x_3}, & \frac{\partial w}{\partial x_3} \end{vmatrix} = 0$$

Dieses ist aber die Gleichung einer Curve 9. O., da die Elemente der Determinante dritten Grades sind.

51. Wenn umgekehrt die Coordinaten eines Punktes x dieser Gleichung genügen, so kann man stets ein Wertheparar λ und μ finden, für die die 3 Bedingungsgleichungen in § 52 gelten, d. h. es giebt eine Curve des Netzes, auf der x ein Doppelpunkt ist.

52. Die zwölf gegebenen Punkte befinden sich selbst unter den Doppelpunkten, die auf den durch sie hindurchgehenden Curven vorkommen, so daß die Curve 9. O., die die Doppelpunkte enthält, auch durch die 12 gegebenen Punkte geht.

Bekanntlich zählt ein zur Bestimmung einer Curve gegebener n facher Punkt für $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$ einfache Punkte, ein Doppelpunkt also für 3. Soll nun einer der 12 Basispunkte Doppelpunkt sein, so zählt dieser für drei, die übrigen 11 Punkte dazu bestimmen dann die Curve 4. O. eindeutig. Es giebt also eine Curve des Netzes, für die ein Basispunkt Doppelpunkt ist, also geht auch die Curve 9. O. durch die 12 Basispunkte des Netzes.

53. Eine Curve 4. O. zu construieren, die durch 13 beliebig gegevene Punkte hindurchgeht.

Im § 34 und 35 ist gezeigt, wie man eine endliche Anzahl von Curven 4. O. construieren kann, die durch 12 beliebig gegebene Punkte gehn. Nimmt man irgend 2 davon heraus, so schneiden diese sich noch in 4 anderen Punkten. Diese 16 Punkte betrachte man als Basispunkte eines Büschels 4. O. Dann kann man sich nach § 48 eine Curve 4. O. construieren, die zu diesem Büschel gehört und außerdem noch durch einen beliebig gegebenen 13ten Punkt geht. Da diese Curve 4. O. sowohl durch die Basispunkte des Büschels, als auch durch einen

13ten Punkt geht, 12 der Basispunkte aber beliebig gegeben waren, so ist hiemit ein Weg angegeben, wie man sich eine Curve 4. O. construieren kann, die durch 13 beliebig gegebene Punkte geht.

54. Durch 13 Punkte sind aber im Allgemeinen unendlich viele Curven 4. O. möglich, denn durch sie ist ein Büschel 4. O. bestimmt. Wie kann man mehrere Curven 4. O. finden, die durch beliebige 13 Punkte gehn?

Durch 12 Punkte ist ein Curvennetz bestimmt. Einige Curven desselben wurden in § 34 und 35 construiert. In § 48 nahmen wir 2 davon heraus und betrachteten ihre Schnittpunkte als Basispunkte eines Büschels und construierten eine Curve desselben, die außerdem durch einen 13ten Punkt ging. Es ist offenbar, daß wenn man 2 andere Curven des Netzes herausnimmt, oder nur eine davon variiert, dann andere Basispunkte ausgeschnitten werden, also auch ein anderes Büschel 4. O. festgelegt wird. Construiert man sich, wie im § 53, eine Curve dieses Büschels, die außerdem durch den vorhin erwähnten 13ten Punkt geht, so entsteht eine neue Curve 4. O., die durch dieselben 13 Punkte geht, wie die frühere. So könnte man noch mehrere Curven 4. O. eines Büschels von Curven 4. O. finden, das durch 13 Punkte festgelegt ist.

55. Eine Curve 4. O. zu construieren, die durch 14 beliebig gegebene Punkte geht.

Nach § 54 konnte man sich mehrere Curven 4. O. verschaffen, die durch 13 beliebig gegebene Punkte hindurchgingen. Diese aber gehören zu einem Büschel von Curven 4. O. und die 13 Punkte zu den Basispunkten dieses Büschels. Nach § 48 kann man sich eine Curve

des Büschels construieren, die außerdem noch durch einen beliebig gegebenen andern Punkt, also durch 14 beliebig gegebene Punkte geht.

Somit ist also ganz allgemein ein Weg angegeben, wie man die Curve 4. O. finden kann, die durch 14 beliebige Punkte bestimmt ist.

Benutzt wurde zu dieser Arbeit:

„Die ebenen Curven dritter Ordnung“
von Dr. H. Durège.

Gedruckt bei A. Kiewning in Königsberg i/Pr.